専門科目［数理モデリング学］

No. 1

下記の６問の中から４問選択して解答せよ。(25 点×４問=100 点)

１．次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 12$$

２．6 組のカップルのサンプルがランダムに選ばれ，次の表に示す年齢のデータが得られた。説明変数（男性の年齢）と予測変数（配偶者の年齢）の関係の線形単回帰モデルを求めよ。

男性の年齢	43	57	28	19	35	34
配偶者の年齢	37	56	32	20	33	38

３．次の表に確率変数 X の確率分布 $P(x)$を示す。MATLAB または Python で X の期待値と分散を計算するプログラムを書け。

x	3	5	7	9	11
$P(x)$	0.25	0.15	0.27	0.13	0.20

４．方程式 $f(x)=0$ を数値計算によって解くためのニュートン法またはニュートン・ラフソン法を説明するとともに，各自で $f(x)$を定義して，求解の計算例を示せ。

５．W_tはウィーナー過程である。下記の式を証明せよ。

$$2\int_0^t W_s dW_s = {W_t}^2 - t$$

６．確率変数 X（$-\infty<X<\infty$）の確率密度関数 $f(x)$ が次式で与えられるとする。

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & 1\le x\le 3 \\ 0 \quad , & x\notin[1,3] \end{cases}$$

(1) a の値を求めよ。

(2) X の期待値と標準偏差を求めよ。

専門科目［数理モデリング学］解答例

問題1　まず,下記の微分方程式を解く。

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 4z = 0 \qquad （１）$$

この微分方程式の特性方程式は　$X^2 - 4 = 0$だ。解はX_1=2 とX_2＝-2。
だから,（１）の解は

$$z = ae^{2x} + be^{-2x}$$

一方, $y_p = -3$は元の微分方程式の解の一つだ。だから,元の微分方程式の一般解を得る。

$$y = z + y_p = -3 + ae^{2x} + be^{-2x},\ a,\ b \in R$$

問題2

x: 説明変数(男性の年齢)
y: 配偶者の年齢
単線形回帰モデル: $y=a+bx$
a と b を求めるためにサンプル平均を計算する。

$$x^*=(43+57+28+19+35+34)/6=36$$
$$y^*=(37+56+32+20+33+38)/6=36$$

だから、

$$b = [\sum(x_i - x^*)(y_i - y^*)]\ /\sum(x_i - x^*)^2 \quad =730/848=0.86$$

$$a = y^* - b\,x^* =36*(1-0.86)=5.01$$

問題3

```
%% Efficient code
x=[3 5 7 9 11];
P=[0.25 0.15 0.27 0.13 0.2];
Mean=sum(x.*P);

fprintf('The mean of X is: %.2f\n', Mean)

x_stand=x-Mean;
```

```
z=x_stand.^2;

Variance =sum(z.*P);
fprintf('The variance of X is: %.2f \n', Variance)
```

%%Output
%The mean of X is: 6.76
%The variance of X is: 8.26

問題4

テイラーの定理によって

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

(x は a の付近に適当な値だ。)
だから,方程式 $f(x)=0$ から

$$f(a) + f'(a)(x-a) = 0$$

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

x の付近に適当な値 x_0 をとり,次の漸化式によって, x に収束する数列を得ることができる場合が多い。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

例:

$$\mathrm{f(x)} = x^3 - 8$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^3 - 8}{3{x_n}^2}$$

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 2.1852$$
$$x_2 = 2.0153$$
$$x_3 = 2.0001$$
$$x_4 = 2.0000$$
$$x_5 = 2.0000$$

問題5

$X_t = W_t$と$g(t,x) = x^2$を選ぶ。だから,

$$Y_t = g(t, X_t) = {W_t}^2$$

伊藤の補題により

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(dW_t)^2$$

だから,

$$dY_t = 2W_t\, dW_t + dt$$

$$Y_t = 2\int_0^t W_s dW_s + t$$

$$2\int_0^t W_s dW_s = {W_t}^2 - t$$

問題６

(1) fは確率分布だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_1^3 ax^2 dx = 1$$

$$\frac{26a}{3} = 1$$

$$a = \frac{3}{26}$$

(2) Xの期待値

$$\mu = \int_1^3 \frac{3}{26} x^3 dx = \frac{30}{13}$$

Xの分散

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= \int_1^3 \frac{3}{26} x^4 dx - \frac{900}{169} \\ &= \frac{363}{65} - \frac{900}{169} = \frac{219}{845}\end{aligned}$$

Xの標準偏差

$$\sigma = \sqrt{\frac{219}{845}} \quad (\approx 0.5)$$

専門科目［数理モデリング学］出題意図

１．　数理モデリング学分野で研究するために必要な応用的な学問である微分方程式学のうち，定数係数 2 階線形非同次方程式学に関する知識を問う。

２．　数理モデリング学分野で研究するために必要な応用的な学問である統計学のうち，線形回帰に関する知識を問う。

３．　数理モデリング学分野で研究するために必要な応用的な学問であるプログラミング言語学のうち，MATLAB または Python に関する知識を問う。

４．　数理モデリング学分野で研究するために必要な基礎的な学問である数値解析学のうち，ニュートン法に関する知識を問う。

５．　数理モデリング学分野で研究するために必要な応用的な学問である確率微分方程式学のうち，伊藤の補題に関する知識を問う。

６．　数理モデリング学分野で研究するために必要な応用的な学問である確率論学のうち，確率密度関数と期待値・分散・標準偏差に関する知識を問う。